

Tragstruktur – Dynamik des Gesamtmodells und Systemidentifikation

Dipl.-Ing. Gerrit Haake
Dipl.-Ing. Wolf-J. Gerasch
Prof. Dr.-Ing. Raimund Rolfes

Leibniz Universität Hannover
Institut für Statik und Dynamik (ISD)
Appelstr. 9A, D-30167 Hannover

Tel.: ++49 511 762-4393
Fax: ++49 511 762-2236
E-Mail: g.haake@isd.uni-hannover.de
www.isd.uni-hannover.de

Tragstruktur – Dynamik des Gesamtmodells und Systemidentifikation

Einleitung

Die Tragstruktur von Offshore-Anlagen steht im Mittelpunkt der Forschungsaktivitäten im Projekt GIGAWIND. Im Gegensatz zu Detailmodellen wird das numerische Gesamtmodell einer Anlage benötigt, um das dynamische Verhalten korrekt zu erfassen. Ziel dieses Beitrags ist die Bereitstellung automatisierter Verfahren zur Validierung dieser Gesamtmodelle (=Übertragungsfunktion), mit denen dann in Verbindung mit geeigneten Lastmodellen (=Eingang) Strukturantworten möglichst exakt wiedergegeben werden können. Als charakteristische Größen für die Validierung werden die modalen Größen der Struktur verwendet.

Parallel zur numerischen Simulation muss das dynamische Verhalten der Tragstruktur auch messtechnisch erfasst werden, was im Offshore-Bereich mangels Informationen über die natürliche Erregung als reine Antwortmessung erfolgt. Für die Zeitreihen- und Modalanalyse wird das ARMA-Modell vorgestellt und seine Vorzüge gegenüber einer herkömmlichen Spektralanalyse aufgezeigt. Zur Übertragung der Ergebnisse eines diskret über die Struktur verteilten Messsystems auf das Gesamtsystem dient die Systemidentifikation. Sie ist also die Schnittstelle zwischen Messdaten und Rechenmodell.

Liegen identifizierte Eigenfrequenzen als Zielgrößen sowie ein parametrisiertes Rechenmodell vor, so erfolgt die Validierung des Rechenmodell automatisiert mit iterativen Verfahren. Für diese Optimierungsaufgabe stehen mehrere Algorithmen wie z. B. die Newton-Iteration zur Verfügung. Die Definition der anzupassenden Modellparameter hat einen großen Einfluss auf die Güte des validierten Modells und erfolgt auf Grundlage von Sensitivitätsanalysen.

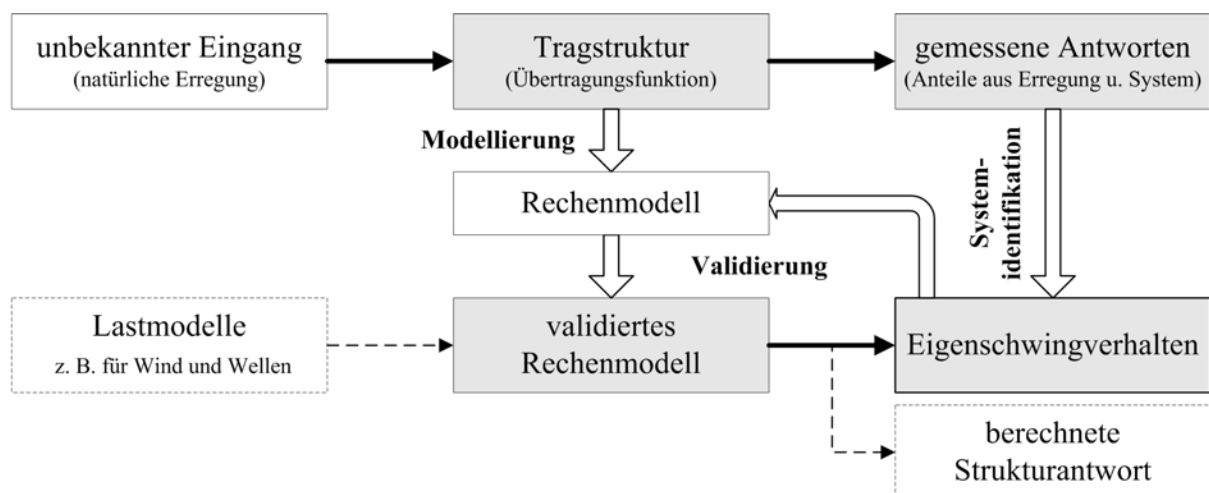


Abbildung 1: Übertragung des dynamischen Systems auf die Simulationsebene

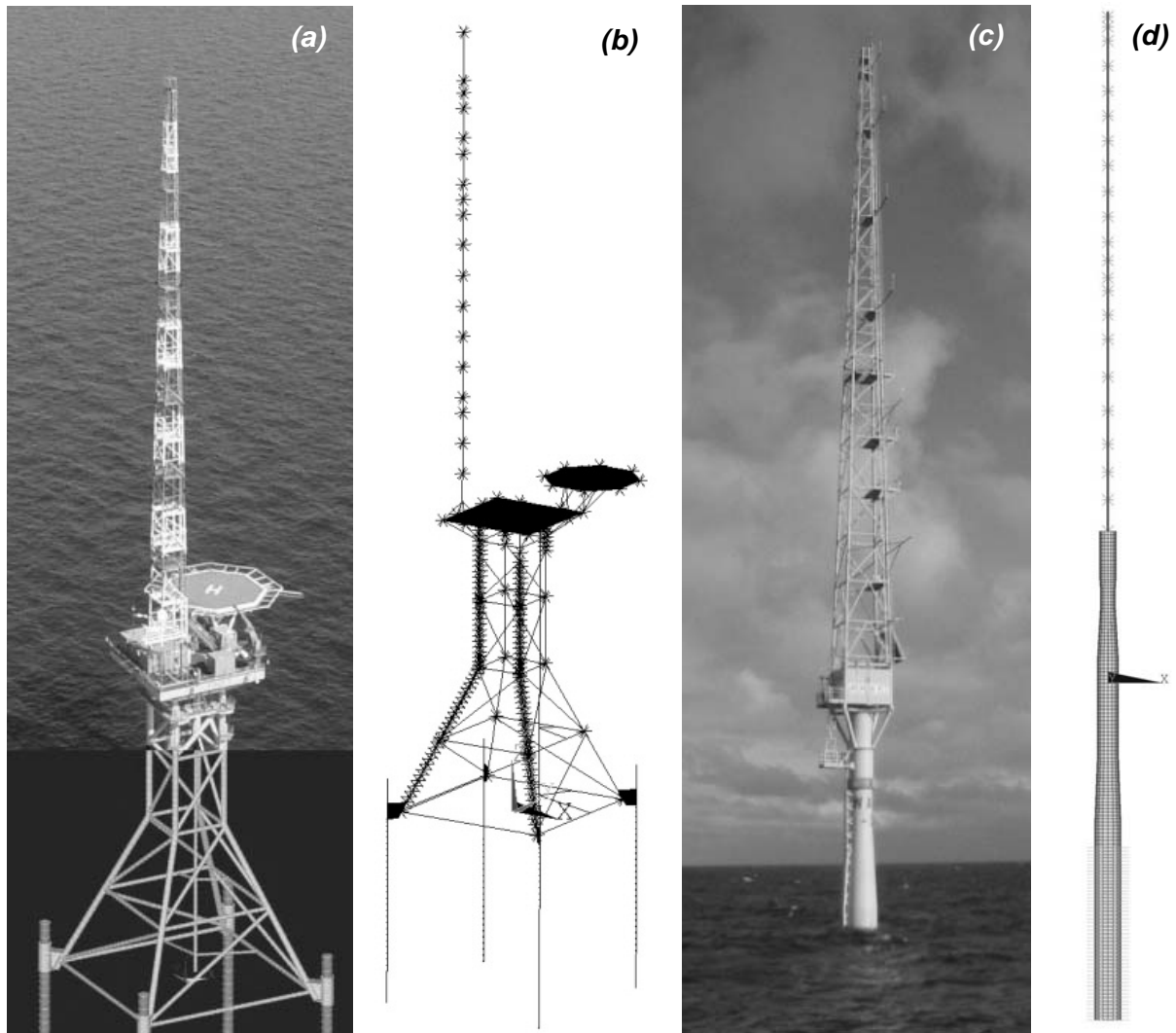


Abbildung 2: Referenzobjekte: Forschungsplattform „FINO 1“ (a), FE-Modell „FINO 1“ (b), Messmast „Amrumbank West“ (c), FE-Modell „Amrumbank West“ (d)

Antwortmessungen infolge natürlicher Erregung

Eine Offshore-Windenergieanlage wird dynamisch hauptsächlich durch Wind, Wellen und Anlagenbetrieb beansprucht. Während die Anlagenlasten aus den Betriebsdaten bekannt und im Spektrum meistens klar abgegrenzt sind, weisen die natürlichen Erregungsarten aus Wind und Wellen ein zunächst unbekanntes Erregerspektrum auf, vgl. Abbildung 1. Zur Zeit dienen die Forschungsplattform „FINO 1“ (Jacket) und der Messmast „Amrumbank West“ (Monopile) als Referenzobjekte, vgl. Abbildung 2, so dass Beanspruchungen aus Betrieb nicht auftreten. Bei der Modalanalyse aus Antwortmessung („output-only modal testing“) müssen also die Eigenmoden des Systems von Anteilen aus den Erregerspektren getrennt werden. Das Messsystem umfasst bei beiden Strukturen sowohl Dehnungs- (DMS) als auch Beschleunigungsaufnehmer, die auf unterschiedlichen Höhen an der Struktur angebracht sind [9].

Systemidentifikation mit ARMA-Modellen

Die Systemidentifikation einer Tragstruktur bedient sich ihrer charakteristischen Größen, um die Ergebnisse einer begrenzten Anzahl von Messpunkten auf ein Gesamtmodell zu übertragen. Charakteristische Größen eines dynamisch beanspruchten Tragwerks sind Eigenfrequenzen, modale Dämpfungen und Eigenvektoren. Diese werden aus gemessenen Zeitreihen ermittelt und mit einem geeigneten Rechenmodell abgeglichen.

Für die Zeitreihenanalyse wird häufig die Fouriertransformation (FFT oder DFT) verwendet. Mit den hier eingesetzten ARMA-Modellen steht der FT ein leistungsstarkes mathematisches Verfahren gegenüber, mit dem Zeitreihen all jener Systeme beschrieben werden können, die deterministische Anteile besitzen. Dies können sowohl abstrakte Systeme der Finanzmathematik sein als auch mechanische Systeme wie z. B. Tragstrukturen von Windenergieanlagen. Der Grundgedanke besteht darin, jeden Wert durch gewichtete Vorgängerwerte auszudrücken, wobei die Wichtungsfaktoren Informationen zu den Eigenschaften des Systems enthalten. Im Folgenden wird dargestellt, wie im speziellen Fall mechanischer Systeme die Eigenwerte, modalen Dämpfungen und Eigenvektoren aus gemessenen Zeitsignalen bestimmt werden, die zur Systemidentifikation notwendig sind. Dies ist bei herkömmlichen FT-Verfahren kaum möglich.

Einen weiteren nicht unerheblichen Vorteil des ARMA-Modells gegenüber der Fouriertransformation bietet der Umstand, dass die Frequenzen hier direkt aus analytischen Formeln berechnet werden und nicht aus diskreten Spektren abgelesen werden müssen. Die sich daraus ergebende sehr viel geringere Anzahl benötigter Datenpunkte P von etwa 2^{10} (gegenüber 2^{15} Datenpunkten bei FFT, Messung „Amrumbank West“) wirkt sich nicht nur positiv auf die Wahl bestimmter, kurzzeitiger Belastungszustände aus, sondern bietet auch Vorteile bei der Analyse von simulierten, künstlichen Zeitreihen.

Mathematische Grundlagen der ARMA-Modelle

Üblicherweise wird eine Messreihe $\{y_k\}$ durch die Zeitfunktion $y(t)$ beschrieben, d.h. alle y_k sind unabhängig von einander gespeichert. Das **AutoRegressive** AR(N)-Modell drückt jeden Wert y_k derart durch N Vorgängerwerte aus, dass die Wichtungskoeffizienten ϕ_j für die gesamte Messreihe konstant bleiben. Damit können deterministische Prozesse exakt abgebildet werden. Bei stochastischen Signalen wird ein Fehler gemacht, der als Rauschterm \mathbf{a}_k mit dem Erwartungswert $E[\mathbf{a}_k] = 0$ und der Streuung $\sqrt{E[\mathbf{a}_k^2]} = \sigma_a$ bezeichnet wird [9]. Mit dem sog. **Moving Average** MA(M)-Modell kann das Grundrauschen mittels der Wichtungskoeffizienten θ_j weiter verringert werden. Daraus ergibt sich das ARMA(N,M)-Modell, wobei N und M die Ordnungen des Prozesses heißen:

$$\mathbf{y}_k = \underbrace{\sum_{j=1}^N \phi_j \cdot \mathbf{y}_{k-j}}_{\text{AR-Modell}} - \underbrace{\sum_{j=1}^M \theta_j \cdot \mathbf{a}_{k-j}}_{\text{MA-Modell}} + \underbrace{\mathbf{a}_k}_{\text{Rauschterm}} \quad (1)$$

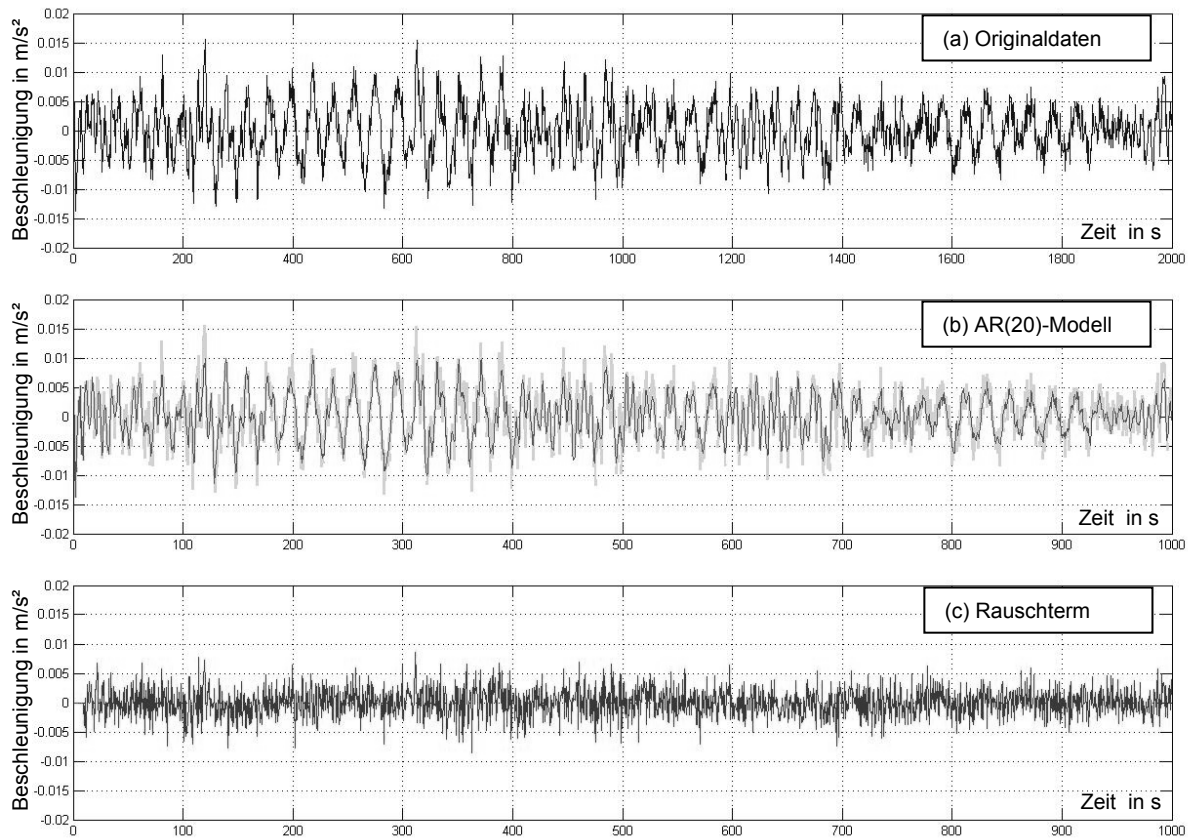


Abbildung 3: Bildung eines AR-Modells, Beispiel „Amrumbank West“: Zeitverlauf original (a), deterministischer Teil im AR-Modell mit $N=20$ (b), Rauschterm (c)

Mit der Berechnung des MA-Modells ist eine sehr rechenaufwendige Iteration verbunden, da auch die Vorgängerwerte des Rauschanteils iterativ angepasst werden müssen. Da bereits mit dem AR-Modell deterministische Zeitreihen vollständig wiedergegeben werden können, wird die Gleichung 1 im Folgenden reduziert auf

$$\mathbf{y}_k = \sum_{j=1}^N \phi_j \cdot \mathbf{y}_{k-j} + \mathbf{a}_k. \quad (2)$$

Die Koeffizienten ϕ_j geben den periodischen Teil der Messdaten an und werden so bestimmt, dass der Rauschterm minimiert wird. Dazu wird für mehr als N Datenpunkte ein AR-Modell mit N Unbekannten aufgestellt, so dass ein überbestimmtes Gleichungssystem entsteht. Dieses wird mit der „Methode der kleinsten Quadrate“ gelöst. Abbildung 3 veranschaulicht die Bildung des AR-Modells an einem Beispiel. Zu beachten ist, dass die Gleichung 2 aufgrund der benötigten N Vorgängerwerte erst ab dem $(N+1)$ -ten Datenpunkt angewendet werden kann. Auf die weitere Berechnung hat dieser Umstand jedoch keinen Einfluss, da nicht das durch Autoregression gefilterte Zeitsignal sondern allein die Koeffizienten ϕ für die nun folgende Modelanalyse herangezogen werden.

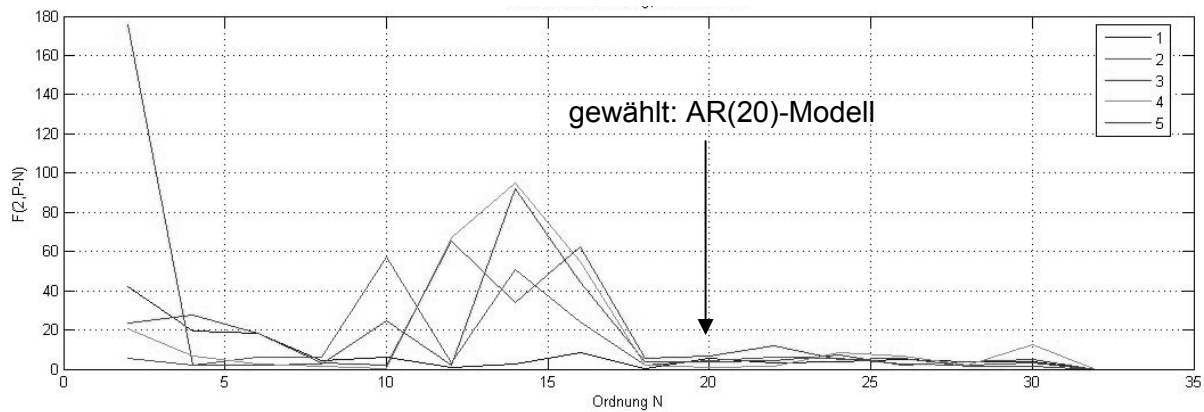


Abbildung 4: Änderung der Fehlerquadratsumme des Rauschterms in Abhängigkeit von der Ordnung N des AR-Modells (Fishersche Verteilung) am Beispiel der Zeitverläufe von 5 Beschleunigungssensoren des Messmastes „Amrumbank West“

Wahl der Ordnung eines AR-Modells

Einen maßgebenden Einfluss auf die Anzahl berechneter Eigenformen hat die Ordnung des AR-Modells. Grundsätzlich gilt: Je tiefer die Grundfrequenz und je höher die Abtastfrequenz um so höher muss die Ordnung gewählt werden. SHI, 1991 [10] schlägt die *Fishersche* Verteilung

$$F(2, P - N) = \frac{\varepsilon_{P,N} - \varepsilon_{P,N+2}}{\varepsilon_{P,N+2}} \cdot \frac{P - N}{2} \quad (3)$$

mit der Fehlerquadratsumme des Rauschterms ε und der Länge des Zeitsignals P als Maß zur Abschätzung der optimalen Ordnung vor. Dabei bedeutet eine starke Verminderung der Fehlerquadratsumme bei Erhöhung der Ordnung des AR-Modells die Abbildung zusätzlicher deterministischer Teile also eine Verbesserung des Modells. In Abbildung 4 sieht man, dass ab dem AR(18)-Modell in der Fehlerquadratsumme keine signifikanten Änderungen mehr eintreten. Es ist daher davon auszugehen, dass bei Verwendung des AR(20)-Modells alle Eigenschwingungen der Struktur berücksichtigt werden.

Modalanalyse mit den Koeffizienten der AR-Modelle

Ausgehend von der Bewegungsdifferentialgleichung in der Zustandsraumdarstellung mit den Systemmatrizen M , K und D und dem Antwortvektor y , gesetzt: $\mathbf{u} = y$ und $\mathbf{v} = \dot{y}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{z}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} & \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}}_{\mathbf{z}} \quad (4)$$

gelangt man über die Singulärwertzerlegung der Gesamtsystemmatrix A zu einem Zusammenhang zwischen den konjugiert komplexen Nullstellen μ_j des aus den Koeffizienten des AR-

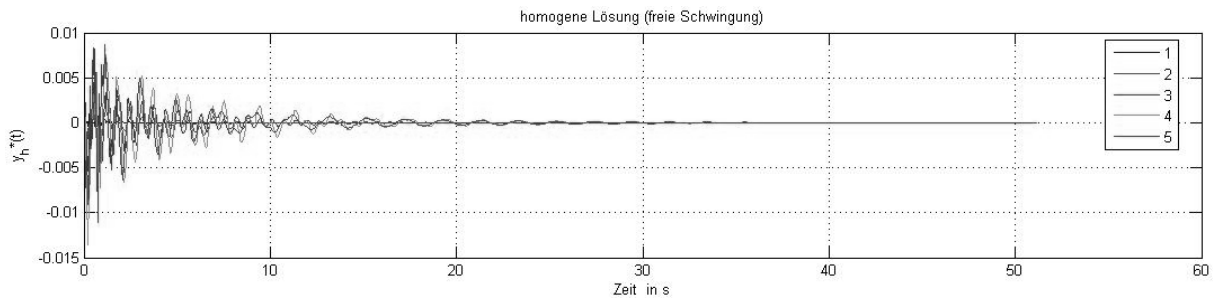


Abbildung 5: Freie Schwingung am Beispiel von 5 Beschleunigungssignalen, „Amrumbank West“

Modells ϕ gebildeten charakteristischen Polynoms (5) und den Eigenwerten und modalen Dämpfungen, die direkt aus Gleichung 6 bestimmt werden [10].

$$\mu^N - \sum_{i=1}^N \phi_i \cdot \mu^{N-i} = 0 \quad (5)$$

$$\mu_j = e^{(-\sigma_j + i\omega_{dj}) \cdot \Delta t} = e^{\rho_j \cdot \Delta t} \quad (6)$$

mit ρ : Eigenwert des Systems

Bei höherer Modellordnung nimmt der Rechenaufwand für die Nullstellenbestimmung des charakteristischen Polynoms stark zu, so dass bei handelsüblichen PCs ab etwa $N=110$ eine numerische Grenze für die Ordnung erreicht ist.

Die Berechnung der Amplituden der Eigenvektoren macht die Ermittlung des homogenen Anteils der Zeitverläufe erforderlich, die den freien Schwingungen y_h entsprechen (Abbildung 5). Dazu wird der Einfluss eines beliebigen Anfangszustandes auf alle nachfolgenden Daten betrachtet, der sich aus der Greenschen Funktion nach Gleichung 7 mit $G_0=1$ ergibt [10].

$$G_k = \sum_{j=1}^l \phi_j \cdot G_{k-j} \quad (7)$$

mit: $l = \min(N, k)$

Verwertung der Ergebnissen aus AR-Modellen

Für jedes Zeitsignal liefert die Modalanalyse des AR-Modells ungefähr *und* maximal $N/2$ Eigenwerte, von denen nur einige Eigenfrequenzen des Systems sind. Andere sind rein mathematische Moden und haben keine weitere Bedeutung. Zu jedem Eigenwert liegen die modale Dämpfung sowie die Amplitude des Eigenvektors am Ort der Messstelle vor. Erst mit der Synthese zu einem Eigenvektor (=Eigenform) werden die Amplitudenwerte der einzelnen Messstellen in Relation gesetzt.

Es gilt also, die realen Eigenfrequenzen zu identifizieren und die Daten unter Einbeziehung aller Messstellen zu einem Eigenmode des Gesamtsystems zusammenzufügen. Dieser Vorgang ist automatisierbar. Als Hilfsmittel dienen in erster Linie die modalen Dämpfungen, die bei den mathematischen Moden erheblich höhere Werte aufweisen. Darüber hinaus bieten die Eigenvektoren

ren selbst Kontrollen, ob die Frequenzen den richtigen Moden zugeordnet worden sind. Manche Zeitsignale enthalten bestimmte Moden nicht, wenn sich der Sensor nämlich in einem Knoten der Eigenform befindet oder nicht ausreichend angeregt worden ist. Solche Fälle werden in der Eigenform mit der Amplitude Null bedacht.

Systemidentifikation am Messmast „Amrumbank West“

Die Systemidentifikation mit dem AR(20)-Modell wird nun am Messmast „Amrumbank West“ für den 04.06.2005 12:00h durchgeführt. Erfahrungen an bereits identifizierten Strukturen zeigen, dass sich die realen Moden des Systems stets in absteigender Reihenfolge in der zweiten Hälfte der Eigenwertetabelle befinden.

Die Identifikation der realen Moden gelingt für die ersten drei Eigenformen des Systems. Die Eigenfrequenzen aus dem AR(20)-Modell werden mit den Ergebnissen der Spektralanalyse (FFT) verglichen. Dabei werden die Frequenzen im „Peak-Picking“ Verfahren abgelesen und liegen daher mit einer niedrigeren Genauigkeit vor. Tabelle 1 zeigt hinsichtlich der Eigenfrequenzen eine sehr gute Übereinstimmung der Analysemethoden.

Außerdem werden Ergebnisse der Modalanalyse des auf Seite 13 vorgestellten FE-Modells hinzugezogen. Da es sich um ein nicht validiertes FE-Modell handelt weisen insbesondere die höheren Eigenfrequenzen noch Differenzen zu den Messergebnissen auf.

Vergleicht man die Eigenformen aus FE- und AR(20)-Modell (Abbildung 6), so wird am Beispiel der zweiten Eigenform deutlich, dass die Anordnung der Messstellen der Beschleunigungsaufnehmer nur für einen bestimmten Bereich eine zuverlässige Überprüfung der identifizierten Eigenformen erlaubt.

Messungen an einem Monopile Maßstabsmodell zeigen, dass AR-Modelle bei Verwendung zusätzlicher Sensoren eine noch klarere Systemidentifikation zulassen.

Tabelle 1: Modalanalyse des AR(20)-Modells und Systemidentifikation „Amrumbank West“

	AR(20)-Modell		FE-Modell	FFT	identifizierte Eigenform
	Eigenwert in Hz	modale Dämpfung in %	Eigenfrequenz in Hz	Eigenfrequenz in Hz	
1.	1,443	21,08	-	-	<i>math. Mode</i>
2.	2,508	14,34	-	-	<i>math. Mode</i>
3.	3,448	7,78	-	-	<i>math. Mode</i>
4.	4,700	5,49	-	-	<i>math. Mode</i>
5.	4,252	8,70	-	-	<i>math. Mode</i>
6.	3,686	50,97	-	-	<i>math. Mode</i>
7.	3,041	6,16	3,143	3,03	3. EF Gesamtsystem
8.	1,575	2,24	1,522	1,57	2. EF Gesamtsystem
9.	0,498	3,60	0,489	0,51	1. EF Gesamtsystem

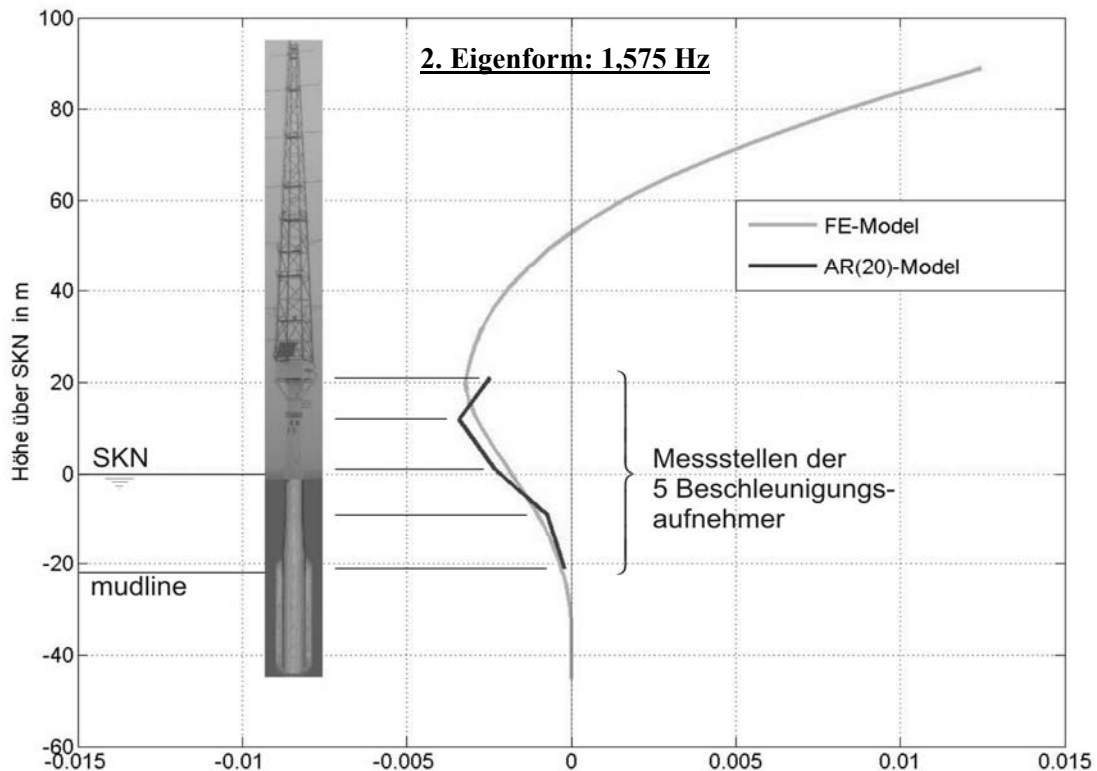


Abbildung 6: „Amrumbank West“, 2. Eigenform: FE-Modell vs. AR(20)-Modell

Modellvalidierung

Ziel der Validierung numerischer Strukturmodelle ist die bestmögliche Übereinstimmung von Strukturantworten des validierten Rechenmodells mit dem Verhalten der realen Struktur. Das setzt zum einen die korrekte Abbildung der Einwirkungen voraus, zum anderen muss die Tragstruktur, die hier als Übertragungsfunktion verwendet wird, möglich exakt im FE-Modell abgebildet sein. Als Indikator für die Qualität dieser Strukturmodelle dient das Eigenschwingverhalten, weil darin bei leichten Tragstrukturen maßgebende Eigenschaften enthalten sind. Die korrekte Abbildung des Eigenschwingverhaltens wiederum setzt die Betrachtung der Struktur als Gesamtsystem voraus. Im vorangegangenen Abschnitt ist die Ermittlung der modalen Größen aus gemessenen Zeitverläufen dargestellt worden. Aus der Systemidentifikation liegen die gemessenen und anhand der Eigenformen verifizierten Eigenfrequenzen vor, die hier als Zielgrößen verwendet werden.

Zur Validierung der Modelle gibt es unterschiedliche Vorgehensweisen:

- Modellkorrektur über das inverse Eigenwertproblem (NATKE, 1983 [7]),
- Formulierung des Problems mit dem Multiparameter-Eigenwertansatz (REETZ, 2006 [8]),
- Iterative Modellvalidierung [5].

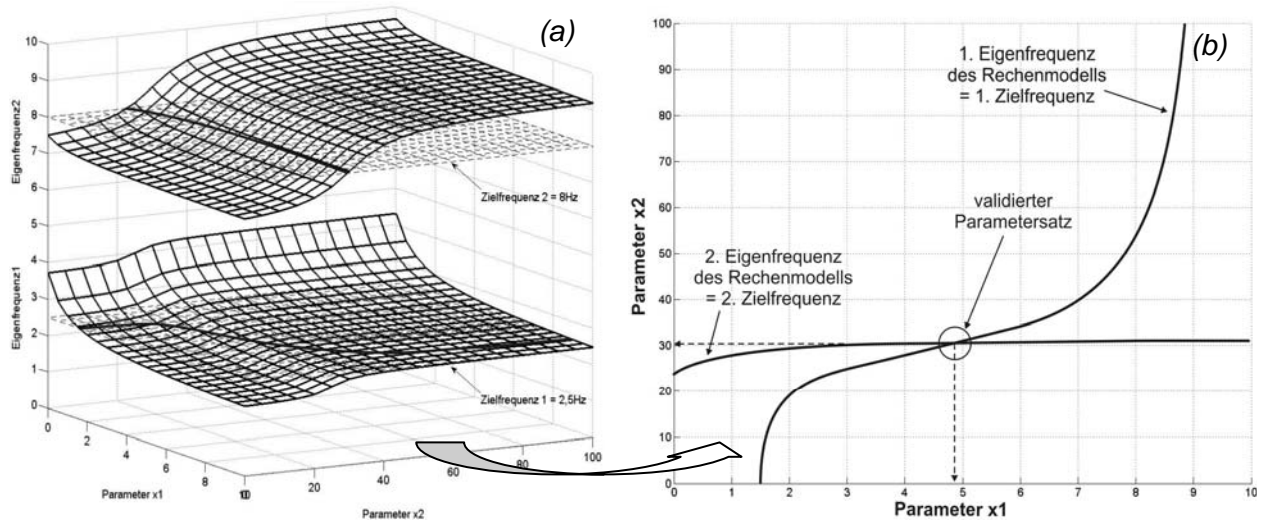


Abbildung 7: Zielfunktional für die Abhängigkeit zweier Eigenfrequenzen eines Rechenmodells von zwei freien Parametern (a), Finden der Zielfrequenzen im Modell (b)

Hier wird das iterative Verfahren verwendet, welches im Rahmen von GIGAWIND entwickelt und bereits softwareseitig umgesetzt ist. Um geeignete Bereiche (bzw. Parameter) des Systems für die Korrektur zu ermitteln, sind Sensitivitätsanalysen nötig.

Abbildung 7a zeigt anhand eines beispielhaften Zielfunctionals unterschiedliche Sensitivitäten von Parametern auf das Eigenschwingverhalten. Der Parameter x_1 könnte für den Einfluss einer Kopfmass stehen und hat eine höhere Sensitivität auf die 1. Eigenfrequenz. Der Parameter x_2 ist charakteristisch für eine elastische Einspannung und zeigt besonders enge Sensitivitätsgrenzen.

Iteratives Verfahren zur Modellvalidierung

Im Gegensatz zum inversen Eigenwertproblem werden hier die Korrekturen am Rechenmodell auf wenige Parameter beschränkt. Daher ist die Kenntnis der Systemmatrizen hier nicht erforderlich. Der Vorteil liegt in der besseren physikalischen Nachvollziehbarkeit der vorgenommenen Korrekturen. Grundsätzlich ist die iterative Modellvalidierung in starkem Maße von der Anzahl vorgegebener Zielgrößen ω (in der Regel Eigenfrequenzen) sowie der Anzahl freier, anzupassender Parameter des Modells \mathbf{x} abhängig, wobei die Aufgabe momentan für

- Anzahl \mathbf{x} gleich Anzahl ω („symmetrisches“ Problem, Lösung eindeutig) und
- Anzahl \mathbf{x} größer als Anzahl ω (mehrere Lösungen möglich)

gelöst werden kann. Praktisch ist dies jedoch keine Einschränkung, da im Modell meistens genügend „kritische“ Parameter vorhanden sind.

In der Verallgemeinerung für den symmetrischen Fall stehen verschiedene Optimierungsalgorithmen zur Verfügung, die größtenteils auf der Newton-Iteration beruhen. Zunächst wird die funktionale Abhängigkeit der Eigenfrequenzen ω von den freien Parametern \mathbf{x} (Abbildung 7)

nach Gleichung 8 als Nullstellenproblem formuliert, indem der Zielvektor ω_0 subtrahiert wird. Als Abbruchbedingung, Gleichung 9, wird die Abstandsnorm zwischen Zielfrequenzen und aktuellem Frequenzvektor verwendet.

$$f(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\omega}_0 \quad (8)$$

$$\text{norm}(\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}^{(k)}) - \boldsymbol{\omega}_0) < 0,001 \quad (9)$$

Wenn die Funktionswerte des Ausgangszustandes mittels Modalanalyse im FE-Programm berechnet sowie die im mehrdimensionalen Fall partiellen Ableitungen in der Jacobi-Matrix $f'(\mathbf{x})$ zusammengestellt sind, kann nach Newton der nächste Parametersatz ermittelt werden sofern die Jacobi-Matrix nicht singulär ist:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - (f'(\mathbf{x}^{(k)}))^{-1} \cdot f(\mathbf{x}^{(k)}) \quad (10)$$

mit $\mathbf{x}^{(k)}$: aktueller Parametersatz

Die Jacobi-Matrix wird dann singulär, wenn zwei Zeilen bzw. zwei Spalten linear voneinander abhängig sind. Dies ist bei einer physikalisch sinnvollen Wahl der freien Parameter (d. h. alle Parameter wirken sich unterschiedlich auf das Eigenschwingverhalten des Modells aus) nur dann der Fall, wenn ein Zeilen- bzw. Spaltenvektor der Matrix Nullvektor ist, also keine Sensitivität der Parameters auf die Eigenfrequenzen vorhanden ist.

Praktisch hat diese Bedingung großen Einfluss auf die Stabilität des Validierungsprozesses, da die partiellen Ableitungen numerisch – also durch inkrementelle Steigerung eines Parameters – ermittelt werden. Da während der Validierung häufig Parametersätze außerhalb der Sensitivitätsgrenzen liegen, werden weitere Optimierungsalgorithmen verwendet:

- Newton-Verfahren (allgemeine Newton-Iteration),
- Newton-Raphson-Verfahren,
- Sekantenverfahren,
- „Sensitives“ Newton-Verfahren,
- Kombination verschiedener Verfahren.

Ein Vergleich der Verfahren ist nur sinnvoll hinsichtlich Schnelligkeit und Zuverlässigkeit (Stabilität), da sich die Genauigkeit des Ergebnisses direkt an den identifizierten Zielfrequenzen beurteilen lässt.

Bei *Newton-Raphson* wird die Jacobi-Matrix des ersten Iterationsschrittes für alle weiteren Schritte verwendet, also $f'(\mathbf{x}^{(1)})$ statt $f'(\mathbf{x}^{(k)})$. Dadurch erhöht sich zwar die Anzahl der Iterationen (lineare statt quadratischer Konvergenz), da jedoch ab $k=2$ jeweils nur eine Modalanalyse durchgeführt werden muss, verringert sich in den meisten Fällen die Rechenzeit. Außerdem ist die Stabilität des Prozesses nach dem ersten Iterationsschritt sichergestellt.

Auch das *Sekantenverfahren* birgt den Vorteil der geringeren Anzahl durchzuführender Modalanalysen. Der nächste Parametersatz ergibt sich durch Approximation des Zielfunktionalen mittels der Sekante zwischen aktuellem und Ausgangswertepaar:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \left(\frac{f(\mathbf{x}^{(k)}) - f(\mathbf{x}^{(0)})}{\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(0)}} \right)^{-1} \cdot f(\mathbf{x}^{(k)}). \quad (11)$$

Für den ersten Iterationsschritt muss jedoch mangels weiterer Wertepaare die Newton-Iteration verwendet werden. Ist die Sensitivität des Parametersatzes bereits im Ausgangszustand zu gering, so führt keines der beschriebenen Verfahren zu einer Lösung. Mit dem als „*sensitiv*“ bezeichneten Newton-Verfahren wird das Inkrement zur Bestimmung der numerischen Ableitung so lange erhöht, bis sich ein bestimmter Betrag der partiellen Ableitung einstellt. Dieses Verfahren ist sehr rechenaufwendig, dafür aber auch besonders zuverlässig. Für den praktischen Gebrauch der iterativen Modellvalidierung bietet sich eine Kombination vorgestellten Verfahren an, wobei die Verfahrenswahl automatisiert sein sollte.

Liegen mehr freie Parameter als Zielgrößen vor, so existieren unendlich viele Lösungen welche die oben genannte funktionale Abhängigkeit erfüllen. Daher wird als zusätzliche Bedingung eine möglichst geringe Abstandsnorm des validierten Parametervektors vom Ausgangszustand gefordert:

$$\text{norm}(\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(0)}) \rightarrow \min \quad (12)$$

Damit wird ein physikalisch möglichst sinnvolles Rechenmodell erzielt. Über das Prinzip der Intervallschachtelung wird das Problem rekursiv auf den symmetrischen Fall übertragen und mit Newton gelöst. Der neue Parametersatz ergibt sich aus dem arithmetischen Mittel der beiden besten vorangegangenen Lösungen. Da diese Verfahren relativ rechenaufwendig ist, sollte die Abbruchbedingung (geringe Änderung des Parametersatzes) nicht zu hoch gesetzt werden. In Weiteren werden jedoch nur symmetrische Validierungsaufgaben behandelt.

Implementierung in Matlab

Die Algorithmen zur Newton-Iteration sowie zur Intervallschachtelung sind mit dem Programm MATLAB[®] implementiert. Damit kann bei Vorgabe von Zielgrößen aus einem aktuellen Parametersatz $\mathbf{x}^{(k)}$ der Parametersatz für den nächsten Iterationsschritt ermittelt werden, sofern die Eigenfrequenzen des numerischen Modells zu diesem Parametersatz bestimmt werden können. Zu diesem Zweck ist ein FE-Programm im Batch-Mode eingebunden, das automatisch die Eigenfrequenzen zu vorgegebenen Parametern liefert. Ein parametrisiertes FE-Modell wird über eine Eingabedatei (Preprozessor) vorgegeben, wobei die Definition der freien Parameter über Korrekturfaktoren im Quellcode des Preprozessors erfolgt. Momentan ist nur die Berechnung mit ANSYS[®] möglich.

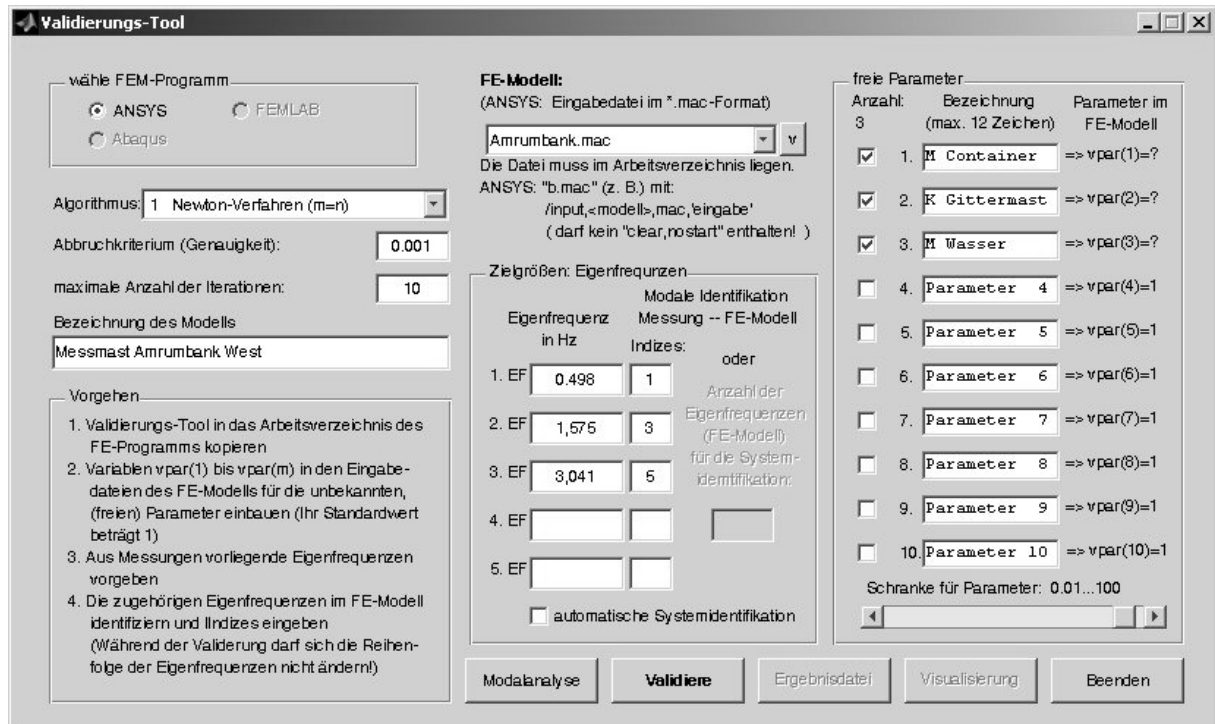


Abbildung 8: Eingabemaske des Tools zur iterativen Modellvalidierung

Abbildung 8 zeigt die Handhabung des Validierungstools über eine graphische Oberfläche mit MATLAB, mit der eine Validierung am Messmast Amrumbank West durchgeführt wird. In Abbildung 9 ist beispielhaft ein quadratisches Konvergenzverhalten mit der Newton-Iteration dargestellt, wobei die Modellverschlechterung im ersten Iterationsschritt von den Startwerten abhängt und unkritisch ist. Besondere Beachtung erfordert bei allen Validierungsmethoden die Systemidentifikation: Anhand der Messdaten müssen nicht nur die modalen Größen selbst bereitgestellt, sondern es muss auch die eindeutige Zuordnung der gemessenen zu den berechneten Eigenformen sichergestellt werden.

Da diese Bedingung für den gesamten Validierungsprozess gilt, führt dies insbesondere dann zu Problemen, wenn die Eigenfrequenzen dicht beieinander liegen und sich ihre Reihenfolge im numerischen Modell während der Validierung ändern kann.

Es ist daher sinnvoll, zu jedem Iterationsschritt eine automatisierte Systemidentifikation anhand des variablen Eigenschwingverhaltens zwischen Rechenmodells und Messdaten durchzuführen.

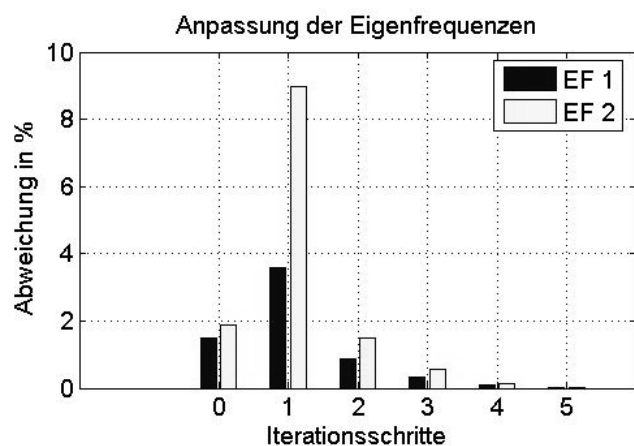


Abbildung 9: Iterationsverlauf der Validierung mit quadratischer Konvergenz

FE-Modell Messmast „Amrumbank West“

Als Ausgangsmodell M_0 wird, wie in [9] und in Abbildung 2 dargestellt, für den Monopile ein 3D-Modell verwendet, um dieses bemessungsrelevante Bauteil später möglichst genau analysieren zu können. Der mit Balkenelementen modellierte Gittermast (incl. Messcontainer) ist über eine biegesteife Platte angeschlossen. Steifigkeit und Masse (abgebildet als Massenpunkte) werden analytisch ermittelt. Für die Lagerung wird das Bettungsmodulverfahren verwendet. Wie der Sensitivitätsuntersuchung in Abbildung 11 zu entnehmen ist, steigt der Einfluss der mitschwingenden Wassermassen bei den höheren Eigenformen so stark an, dass der Parameter C_m berücksichtigt wird, indem die Rohdichte des Stahls im Bereich zwischen Meeresboden und Seekartennull um den entsprechenden Betrag (für $C_m=1$: $\Delta\rho \approx 12.250\text{kg/m}^3$) erhöht wird.

Während sich die Grundfrequenz nur um 0,4% verändert, beträgt die Abweichung in der 2. Eigenfrequenz bereits 5,1%. In der 3. und 4. Frequenz sind es sogar 8,4% bzw. 17,9%. Der analytische Ansatz der mitschwingenden Wassermassen sieht zusätzlich den Ansatz der verdrängten Wassermasse vor, was genau der doppelten Masse ($C_m=2$) entspricht. Da Wasser inkompressibel ist, stimmt die Modellvorstellung starr angeschlossener Wassermassen. Allerdings variiert C_m nach CLAUSS et al. [1], Abbildung 10, in Abhängigkeit von Partikelgeschwindigkeit, Wellenperiode und Durchmesser des Pfahls.

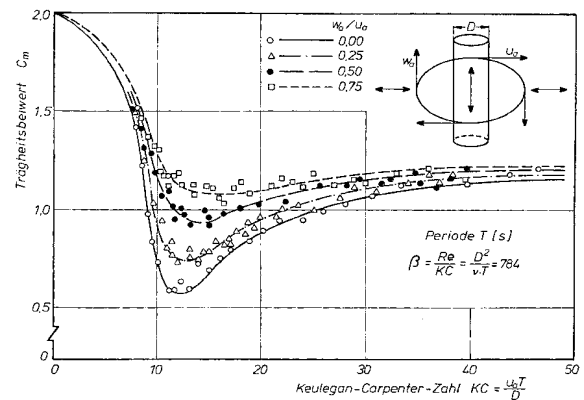
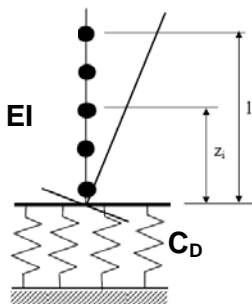


Abbildung 10: Abhängigkeit der mitschwingenden Wassermasse, Beiwert C_m , nach [1]

Weitere Sensitivitätsanalysen aus [9] ergeben, dass der Einfluss der elastischen Lagerung auf das Eigenschwingverhalten deutlich geringer ausfällt, als vielfach angenommen. Es zeigt sich aber auch, dass ein völliger Verzicht auf die elastische Lagerung nicht vertretbar ist. Zum Einfluss der Lagerung auf das Eigenschwingverhalten sei angemerkt, dass dieser bei weichen Strukturen recht gering ist, wie folgende Gleichung nach GERASCH [3] unter Vernachlässigung der Schubdeformation für die Grundfrequenz f_0 zeigt:



$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{\left(\frac{l}{3EI} + \frac{1}{l \cdot G \cdot A_s} + \frac{1}{C_D \cdot I_F} \right) \cdot \sum_i G_i \cdot z_i^2}} \quad (13)$$

↓ dominant für kleine EI
 ↓ Federsteifigkeit für Kipp-schwingungen

Da es sich bei Offshore-WEA sowie den hier behandelten Forschungsplattformen um weiche Strukturen handelt, ist prinzipiell von einer geringen Sensitivität der elastischen Lagerung auf die Eigenfrequenzen zu rechnen.

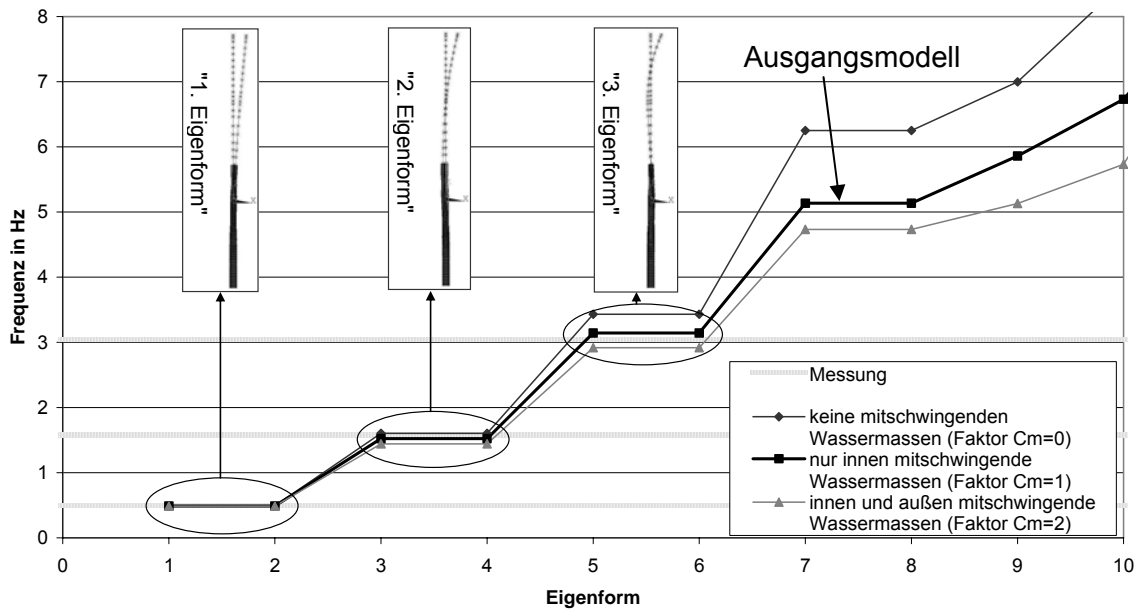


Abbildung 11: Einfluss der mitschwingenden Wassermassen auf die Eigenformen „Amrumbank West“

Modellvalidierung Messmast „Amrumbank West“

Aus der Systemidentifikation mit dem AR-Modell werden folgende gemessene Eigenfrequenzen als Zielgrößen verwendet:

- 0,498Hz 1. Biegeeigenform
- 1,575Hz 2. Biegeeigenform
- 3,041Hz 3. Biegeeigenform
- 5,10Hz 4. Biegeeigenform, aus FFT (Identifikation nicht bestätigt), vgl. [9]

Aus dem Abgleich mit dem Rechenmodell hat sich ergeben, dass aufgrund der Symmetrie der Struktur die 1., 3., 5. und 7. Eigenform des Rechenmodells zugeordnet werden müssen.

Auf Grundlage von Vorüberlegungen in [9] werden die Steifigkeit des Gittermastes (ermittelt aus dem Abstand der Vertikalstäbe) und des Messcontainers (geschätzt) in einem Validierungsparameter zusammengefasst. Außerdem werden die Masse des Messcontainers aufgrund zahlreicher Annahmen in der Massenermittlung verwendet sowie die mitschwingende Wassermasse (Ausgangswert: $C_m=1$).

Die Validierung wird als 3x3 Problem (3 Zielgrößen und 3 Parameter) mit dem Newton-Verfahren durchgeführt. Nach nur zwei Iterationsschritten (Fehlernorm $< 0,001$) liegt das validierte Modell M_V vor, das in Tabelle 2 dem Ausgangsmodell M_0 sowie den Messergebnissen aus dem AR-Modell gegenübergestellt ist. Zusätzlich werden die Ergebnisse mit einem Modell verglichen [6], das für den Monopile nur Balkenelemente verwendet sowie für den Gittermast und das Übergangsstück ein detailliertes Teilmodell, das alle Stäbe einzeln erfasst. Das mitschwingende Wasser ist in diesem Balkenmodell konstant mit $C_m=2$ berücksichtigt.

Tabelle 2: Modellvalidierung „Amrumbank West“

Parameter:	Messung AR-Modell	Ausgangs- FE-Modell M_0		Vergleich Balkenmodell aus [6]		Validiertes FE-Modell M_V	
1. Parameter: Masse Messcontainer		1,00		-		0,4450	
2. Parameter: Steifigkeit Gittermast		1,00		-		1,0079	
3. Parameter: Mitschwingende Wassermasse (C_m)		1,00		2,00		1,4580	
Eigenfrequenzen:	in Hz	in Hz	Fehler in %	in Hz	Fehler in %	in Hz	Fehler in %
1. Eigenform	<u>0,498</u> (Zielfrequenz)	0,489	1,89	0,43	13,7	0,498	0,00
2. Eigenform	<u>1,575</u> (Zielfrequenz)	1,522	3,37	1,63	3,49	1,575	0,01
3. Eigenform	<u>3,041</u> (Zielfrequenz)	3,143	3,36	3,30	8,52	3,041	0,01
4. Eigenform	5,10 (?)	5,135	0,69	5,41	6,08	5,253	2,98

Für eine Modellvalidierung kommen prinzipiell verschiedene Parameterkombinationen in Betracht, die im Vorfeld anhand von Sensitivitätsanalysen und Erfahrungswerten gegeneinander abgewogen werden. Daher ist auch die Validierung nicht eindeutig und muss anhand der Veränderung der Parameter im Validierungsprozess auf Plausibilität geprüft werden. Die Plausibilitätskontrolle am validierten FE-Modell gewährleistet, dass die Parameter im (physikalisch) sinnvollen Rahmen bleiben, und dass nicht nur die Zielgrößen sondern das gesamte Schwingungsverhalten des Modells besser mit dem der realen Struktur übereinstimmen.

Während sich die Steifigkeit des Gittermastes im Modell M_V kaum ändert, verringert sich die Masse des Messcontainers auf 45% seines Ausgangswertes. In diesem als Massenpunkt modellierten Bauteil sind auch Anteile aus nicht tragenden Teilen des benachbarten Übergangsstücks berücksichtigt. Der Faktor der mitschwingenden Wassermassen steigt um 46%. Alle Änderungen beruhen auf unsicheren Annahmen und ließen sich tendenziell an der realen Struktur begründen. Als einzige nicht vorgegebene Frequenz verschlechtert sich die Übereinstimmung in der 4. Eigenform auf knapp 3%, wobei hier die Identifikation durch das AR-Modell nicht endgültig bestätigt ist. Ein Vergleich mit dem Balkenmodell [6] ergibt, dass das validierte Modell nicht nur für die Zielfrequenzen sondern auch in der 4. Eigenfrequenz deutlich bessere Ergebnisse liefert. Das zeigt, dass Modelle mit vereinfachten Annahmen bei nicht bemessungsrelevanten Bauteilen wie dem Gittermast durchaus besser zur Erfassung des Eigenschwingverhaltens der Gesamtstruktur geeignet sein können.

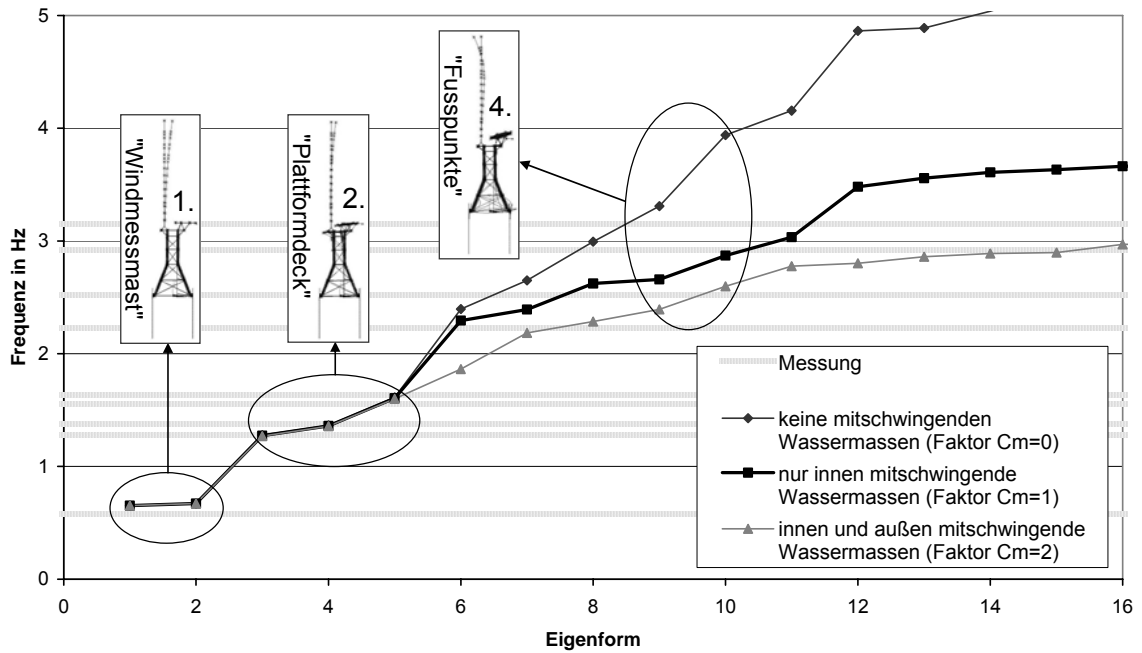


Abbildung 12: Einfluss der mitschwingenden Wassermassen auf das Eigenschwingverhalten „FINO 1“

FE-Modell Forschungsplattform „FINO 1“

Es wird das in [9] beschriebene FE-Modell verwendet, vgl. Abbildung 2. In diesem wird das Jacket über Balkenelemente abgebildet. Für die Decks werden zusätzlich Schalenelemente verwendet. Wie bei Amrumbank wird der Windmessmast als vertikaler Stab mit Zusatzmassen modelliert. Die Rammpfähle sind horizontal und vertikal elastisch gelagert. Nachfolgend wird die Wahl geeigneter Validierungsparameter diskutiert:

Die *Biegesteifigkeit des Windmessmastes* hat sich bei dem Modell „Amrumbank West“ bewährt und wird wegen des großen Einflusses auf die 1. Eigenform verwendet.

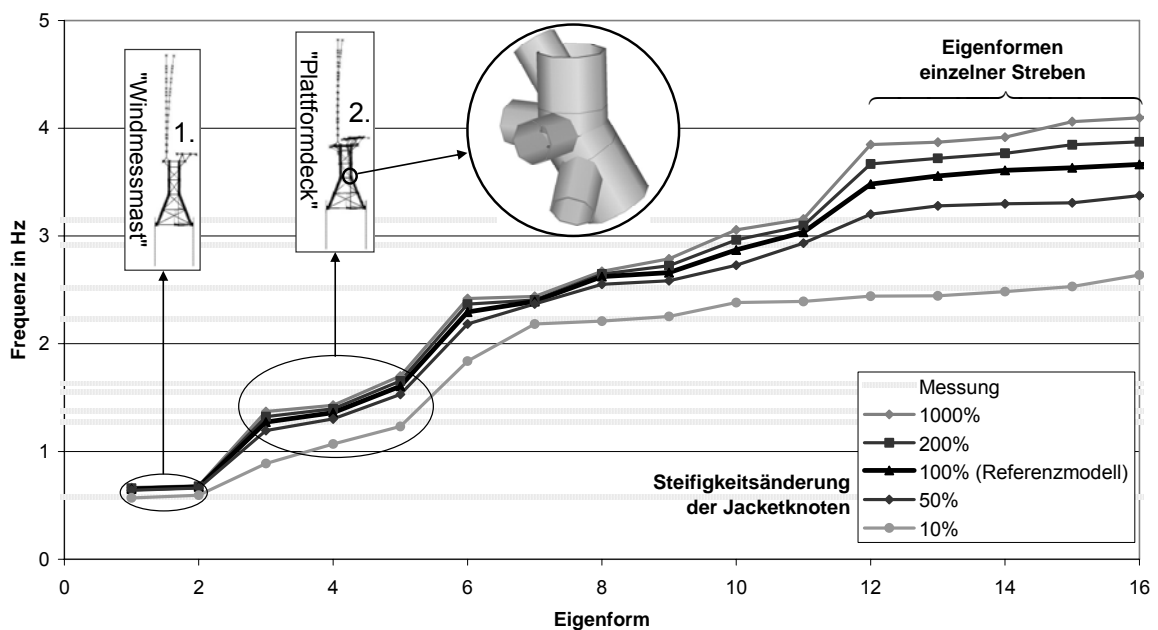


Abbildung 13: Einfluss der Steifigkeit der Jacket-Knoten auf das Eigenschwingverhalten „FINO 1“

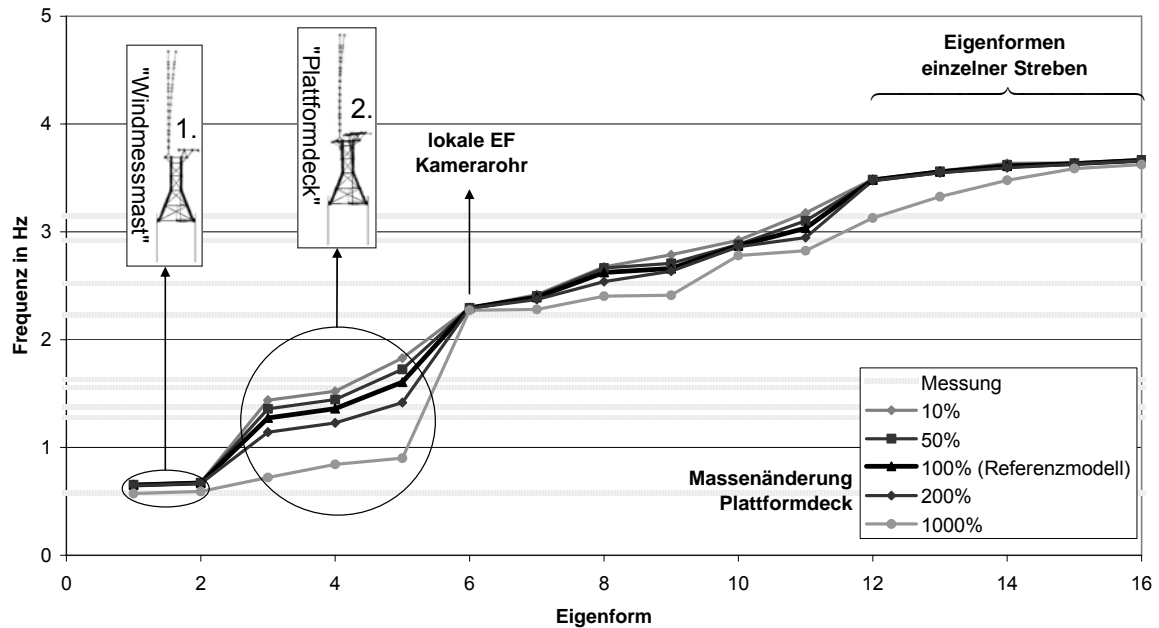


Abbildung 14: Einfluss der Zusatzmassen des Plattformdecks auf das Eigenschwingverhalten „FINO 1“

Die *mitschwingenden Wassermassen* haben nach Abbildung 12 erst Einfluss auf die Eigenfrequenzen über 2 Hz. Da alle Zielgrößen aufgrund der sicheren Identifikation darunter liegen, kommt dieser Parameter hier nicht in Frage.

Die *vertikale Federsteifigkeit* zur elastischen Lagerung der Rammpfähle kommt aufgrund zu geringer Sensitivität nicht in Frage [9].

Die *Steifigkeit der Jacketknoten* wird in Sensitivitätsanalyse in Abbildung 13 zwischen 10% und 1000% relativ drastisch variiert. Ein signifikanter Einfluss auf die Eigenfrequenzen ist nur für die Eigenformen einzelner Streben vorhanden. Der Einfluss auf die betrachteten Biegeeigenformen, bei dem das Jacket als Kräftepaar trägt, ist vorhanden jedoch eher gering. Die unterste Kurve (10%) bestätigt Überlegungen, dass sich punktuelle Steifigkeitsschwächungen stärker als punktuelle Versteifungen auf die Gesamtsteifigkeit auswirken. Eine Querschnittsschwächung auf unter 50% erscheint jedoch praktisch unrealistisch.

Änderungen der *Masse Plattformdecks* (Abbildung 14) sowie der *Masse Helideck* in gleicher Variationsbreite zeigen dagegen insbesondere zwischen 1 Hz und 2 Hz eine hohe Sensitivität des Eigenschwingverhalten und werden daher für die Validierung verwendet.

Modellvalidierung Forschungsplattform „FINO 1“

Aus einer Spektralanalyse in [9] werden folgende identifizierte Eigenformen verwendet:

- 0,58 Hz 1. Eigenform Gesamtsystem
- 1,278 Hz 2. Eigenform Gesamtsystem (Biegung O–W, Torsion)
- 1,377 Hz 2. Eigenform Gesamtsystem (Biegung N–S)
- 1,634 Hz 2. Eigenform Gesamtsystem (Torsion)
- 2,23 Hz 3. Eigenform Gesamtsystem
- 2,51 Hz 4. Eigenform Gesamtsystem (Identifikation nicht gesichert)

Tabelle 3: Modellvalidierung „FINO 1“

Parameter:	Messung FFT	Ausgangs- FE-Modell „M ₀ “		Validiertes FE-Modell „M _V “	
1. Parameter: Steifigkeit Gittermast		1,00		0,69187	
2. Parameter: Masse Plattformdeck		1,00		0,3048	
3. Parameter: Masse Helideck		1,00		1,3824	
Eigenfrequenzen:	in Hz	in Hz	Fehler in %	in Hz	Fehler in %
1. Eigenform Gesamtsystem	<u>0,58</u> (Zielfrequenz)	0,652	12,07	0,580	0,00
		0,671	15,69	0,592	2,07
2. Eigenform Gesamtsystem	<u>1,278</u> (Zielfrequenz) <u>1,377</u> <u>1,634</u> (Zielfrequenz)	1,273	0,39	1,278	0,00
		1,360	1,23	1,350	1,96
		1,605	1,77	1,634	0,00
3. Eigenform Gesamtsystem	2,23	2,392	7,26	2,295	2,91
4. Eigenform Gesamtsystem	2,51 (?)	2,659	5,94	2,644	5,33

Diesen Frequenzen sind im Rechenmodell die 1./2. (Symmetrie), 3., 4., 5., 7. und 9. Eigenform zugeordnet. Die 6. Eigenform bezieht sich auf das Teilsystem Kamerarohr und wird aufgrund fehlender Messdaten nicht weiter beachtet. Für die gemessene Frequenz bei 2,23Hz kann die Identifikation erst durch die Validierung bestätigt werden.

Als Schlussfolgerung aus den Sensitivitätsuntersuchungen ergeben sich die Steifigkeit des Windmessmastes, die Masse des Plattformdecks sowie die Masse des Helidecks als Validierungsparameter. Die Validierung wird wiederum mit dem allgemeinen Newton-Verfahren durchgeführt und benötigt drei Iterationsschritte.

Die validierten Parameter sind in Tabelle 3 aufgeführt. Die Steifigkeiten des Gittermastes beziehen sich hier nur auf die reine Gitterstruktur im Gegensatz zu „Amrumbank West“, wo auch der Messcontainer einbezogen war. Ihre Reduktion auf etwa 2/3 ist realistisch, wenn man bedenkt, dass sie unter der Annahme ideal biegesteifer Schraubverbindungen ermittelt wurden. Für den Parameter „Masse Plattformdeck“ ergibt sich eine Verminderung auf 30%, die auf den ersten Blick recht hoch erscheint. Allerdings fällt die Änderung der Masse Helideck mit einer Zunahme auf 138% genau gegenteilig aus, so dass hier zum Teil eine Verlagerung der Massen vorliegt. Ein Blick in die Konstruktionszeichnungen zeigt mehrere Anbauten, die sowohl dem Plattform als auch dem Helideck aufgeschlagen werden können bzw. Anbauten, die veränderliche Größen sind wie z. B. der Dieseltank. Zudem könnten durch diesen Parameter auch andere fehler-

hafte Massenschätzungen in der Unterkonstruktion kompensiert werden. Bei den Eigenfrequenzen des validierten Modells zeigen sich im Vergleich mit den Messgrößen abgesehen von einer Frequenz bei 1,377Hz nur Verbesserungen, die besonders bei der 1. aber auch bei der 3. Eigenform des Gesamtsystems drastisch ausfallen. Unter der Annahme, dass die 4. Eigenform mit der Spektralanalyse richtig identifiziert ist, verbessert sich diese nur geringfügig. Möglicherweise müssen hier weitere Parameter variiert werden.

Insgesamt verringert sich der Fehler im Eigenschwingverhalten des Modells durch die Validierung um 75%, so dass das hier validierte Modell plausibel ist.

Zusammenfassung und Ausblick

Es sind Modellvalidierungen von Gesamttragstrukturen mit dem Ziel durchgeführt worden, Strukturantworten an einem je nach Relevanz für die Bemessung möglichst einfachen FE-Modell zu berechnen, die möglichst gut mit denen der realen Struktur übereinstimmen. Die Modelle dienen als Übertragungsfunktion, die zur Berechnung der Strukturantwort aus gegebenem Eingang sehr hohen Anforderungen unterliegt. Als Indikator für die Qualität des validierten Strukturmodells wird das Eigenschwingverhalten verwendet, das alle globalen Eigenschaften einer leichten Struktur widerspiegelt.

Die Auswertung gemessener Zeitverläufe erfolgt üblicherweise über Spektralanalysen (FFT). Am Beispiel des Messmastes „Amrumbank“ wird gezeigt, dass die Verwendung von ARMA-Modellen zur Modalanalyse von Strukturmessungen entscheidende Vorteile bietet:

- Der Systemidentifikation stehen neben den Eigenfrequenzen auch modale Dämpfungen und Eigenvektoren zur Verfügung,
- die Eigenfrequenzen werden bei ARMA-Modellen analytisch berechnet während sie bei der Spektralanalyse graphisch abgelesen werden müssen und
- das analysierte Zeitsignal kann deutlich kürzer gewählt werden, so dass auch kurzzeitige Belastungssituationen selektiert werden können.

Mit dem ARMA-Modell werden die ersten drei Eigenformen des Messmastes „Amrumbank West“ bei 0,498Hz, 1,575Hz und 3,041Hz identifiziert. Als Zielgrößen fließen diese Informationen in die Modellvalidierung ein. Im Gegensatz zu manuellen Modellkorrekturen verwendet die hier vorgestellte Modellvalidierung mathematische Optimierungsalgorithmen (z. B. Newton-Iteration, Sekantenverfahren), die in einem iterativen Prozess Übereinstimmungen des Eigenschwingverhaltens zwischen dem Rechenmodell und der realer Struktur herbeiführen. Für die numerische Modalanalyse greift das in Matlab implementierte Verfahren vollautomatisch auf ein FE-Programm zu. Voraussetzung ist ein (über wenige Modellfaktoren) parametrisiertes FE-Modell, dessen Eigenfrequenzen den gemessenen Größen eindeutig zugeordnet sind. Zur Wahl der Parameter ist es sinnvoll, im Vorfeld deren Einfluß auf das Eigenschwingverhalten mittels Sensitivitätsanalysen zu verifizieren.

Die Wahl der Validierungsparameter der Modelle „Amrumbank West“ und „FINO 1“ orientiert sich an verschiedenen Sensitivitätsanalysen. Es zeigt sich, dass die elastische Einspannung das Eigenschwingverhalten relativ gering beeinflusst und daher als Validierungsparameter nicht geeignet ist. Stattdessen wird das Modell „Amrumbank West“ über die mitschwingende Wassermasse, deren Einfluss ab der 3. Eigenform nicht mehr vernachlässigt werden darf, sowie über die Steifigkeit und Masse im Bereich Gittermast/Messcontainer validiert. Aus Sensitivitätsanalysen am Modell „FINO 1“ ergibt sich für den Parameter „Steifigkeit Jacketknoten“ nur bei den Eigenformen einzelner Fachwerkstreben ein signifikanter Einfluß. Die Validierung erfolgt neben dem Parameter „Steifigkeit Windmessmast“ über die Massen für Plattformdeck und Helideck. Beide Validierungen sind auf Plausibilität geprüft.

Weiterer Forschungsbedarf bei den vorgestellten Verfahren zur Systemidentifikation und Modellvalidierung besteht hauptsächlich in der Automatisierung. So soll ein Verfahren zur Bestimmung der Ordnung der AR-Modelle erarbeitet werden, um eine einfache Handhabung zu gewährleisten. Die iterative Validierung setzt momentan voraus, dass die Eigenformen des numerischen Modells während der Iteration ihre Reihenfolge beibehalten. Diese Einschränkung soll durch eine automatisierte Systemidentifikation während der Iteration behoben werden.

Literatur

- [1] Clauss, G., Lehmann, E., Östergaard, C. (1988): Meerestechnische Konstruktionen, Springer Verlag, 1988.
- [2] Gawronski, Wodek K. (1998): Dynamics and Control of Structures – A Modal Approach, Mechanical Engineering Series, Springer-Verlag, New York, Inc., ISBN 0-387-98527-1, 1998.
- [3] Gerasch, W.-J. (2005): Schwingungsprobleme im Bauwesen, Skriptum, Hannover, 2005.
- [4] Gerasch, W.-J.; Haake, G. (2005): Validierte Strukturmodelle, in: GIGAWINDplus Jahresbericht 2004, S. 33-47, Hannover, April 2005.
- [5] Haake, G.; Gerasch, W.-J.; Rolfes, R. (2007): Validierte Strukturmodelle und Systemidentifikation, in: GIGAWINDplus Jahresbericht 2006, Kapitel 4, Hannover, April 2007.
- [6] Kossel, T. (2006): Wellenbelastung auf die Tragstrukturen von Offshore-Konstruktionen, Diplomarbeit, Leibniz Universität Hannover, 2006.
- [7] Natke, H. G. (1983): Einführung in Theorie und Praxis der Zeitreihen- und Modalanalyse, Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, ISBN 3-528-08145-7, Braunschweig, 1983.
- [8] Reetz, J. (2006): Damage detection on structures of offshore wind turbines using multi-parameter eigenvalues, Wind energy, Proceedings of the euromech colloquium 464b wind energy (S. 303-306), Springer-Verlag, 2006.
- [9] Rolfes, R.; Gerasch, W.-J.; Haake, G. (2006): Validierte Strukturmodelle, in: GIGAWINDplus Jahresbericht 2005, S. 39-63, Hannover, April 2006.
- [10] Shi, D. (1991): Ermittlung modaler Größen von Werkzeugmaschinen im Betriebszustand mit einem AR(ARMA)-Modell, VDI-Verlag, Berlin, 1991.